BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ
№1 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2009

ОБ ОЦЕНКЕ РЕЗОЛЬВЕНТЫ ПОЛИНОМИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРНОГО ПУЧКА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С СЛОЖНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ

А.Р.АЛИЕВ[1], А.А.ГАСЫМОВ[2]
[1]Бакинский Государственный Университет,
[2]Институт Математики и Механики НАН Азербайджана

В работе получены оценки резольвенты одного класса полиномиальных операторных пучков четвертого порядка, которые в будущем позволяют перейти к изучению новых спектральных задач. Отметим, что главная часть исследуемых пучков обладает сложной характеристикой.

Рассмотрим в сепарабельном гильбертовом пространстве H полиномиальный операторный пучок четвертого порядка

$$P(\lambda)=(\lambda E-A)(\lambda E+A)^3+\sum_{s=1}^{3}\lambda^{4-s}A_s, \tag{1}$$

где A – самосопряженный положительно-определенный оператор, E – единичный оператор, A_s, $s=1,2,3$, - линейные операторы, причем A_sA^{-s}, $s=1,2,3$, ограничены в H, и обозначим через

$$P_0(\lambda)=(\lambda E-A)(\lambda E+A)^3, \quad P_1(\lambda)=\sum_{s=1}^{3}\lambda^{4-s}A_s.$$

Справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть имеет место неравенство*

$$\alpha=\sum_{s=1}^{3}a_{4-s}\left\| A_sA^{-s}\right\|<1,$$

где $a_1=a_3=\dfrac{3\sqrt{3}}{16}$, $a_2=\dfrac{1}{4}$. *Тогда на мнимой оси резольвента пучка* $P(\lambda)$ *существует и справедлива оценка*

$$\sum_{j=0}^{3}\left\|\lambda^{4-j}A^jP^{-1}(\lambda)\right\|\le const. \tag{2}$$

Доказательство. Пусть $\lambda=i\zeta$, $\zeta\in R=(-\infty;+\infty)$. Из условий, налагаемых на оператор A, очевидно, что при $\lambda=i\zeta$ операторный пучок $P_0(\lambda)$ обратим в H и

$$P_0^{-1}(\lambda)=(\lambda E-A)^{-1}(\lambda E+A)^{-3}, \ \lambda=i\zeta, \ \zeta\in R.$$

Тогда при $\lambda = i\zeta$ пучок $P(\lambda)$ представим в виде

$$P(\lambda) = \left(E + P_1(\lambda)P_0^{-1}(\lambda)\right)P_0(\lambda), \tag{3}$$

откуда имеем, что

$$P_1(\lambda)P_0^{-1}(\lambda) = \sum_{s=1}^{3} \lambda^{4-s} A_s A^{-s} A^s P_0^{-1}(\lambda),$$

а потому

$$\left\| P_1(\lambda)P_0^{-1}(\lambda) \right\| \le \sum_{s=1}^{3} \left\| A_s A^{-s} \right\| \left\| \lambda^{4-s} A^s P_0^{-1}(\lambda) \right\|.$$

Теперь же оценим нормы $\left\| \lambda^{4-s} A^s P_0^{-1}(\lambda) \right\|$, $s = 1, 2, 3$, при $\lambda = i\zeta$, $\zeta \in R$. Сперва рассмотрим случай $s = 1$. Используя спектральное разложение оператора A, получим:

$$\left\| \lambda^3 A P_0^{-1}(\lambda) \right\| = \sup_{\mu \in \sigma(A)} \left| \frac{\mu (i\zeta)^3}{(i\zeta - \mu)(i\zeta + \mu)^3} \right| =$$

$$= \sup_{\mu \in \sigma(A)} \frac{\mu |\zeta|^3}{\left(\zeta^2 + \mu^2\right)^2} = \sup_{\mu \in \sigma(A)} \left(\frac{\mu^2 \zeta^6}{(\zeta^2 + \mu^2)^4} \right)^{1/2},$$

где $\sigma(A)$ - спектр оператора A. Приняв $\omega = \dfrac{\zeta^2}{\mu^2}$, имеем

$$\left\| \lambda^3 A P_0^{-1}(\lambda) \right\| \le \sup_{\omega \ge 0} \left(\frac{\omega^3}{(\omega + 1)^4} \right)^{1/2}.$$

Необходимо отметить, что функция

$$f(\omega) = \frac{\omega^3}{(\omega + 1)^4}$$

примет свое максимальное значение в точке $\omega_0 = 3$, следовательно,

$$f_{\max} = f(\omega_0) = \frac{27}{256},$$

и потому

$$\left\| \lambda^3 A P_0^{-1}(\lambda) \right\| \le \frac{3\sqrt{3}}{16} = a_3.$$

Аналогичным образом получаем, что

$$\left\| \lambda^2 A^2 P_0^{-1}(\lambda) \right\| \le \frac{1}{4} = a_2,$$

$$\left\| \lambda A^3 P_0^{-1}(\lambda) \right\| \le \frac{3\sqrt{3}}{16} = a_1.$$

Тем самым, имеем:

$$\left\| P_1(\lambda)P_0^{-1}(\lambda) \right\| \le \sum_{s=1}^{3} a_{4-s} \left\| A_s A^{-s} \right\| = \alpha < 1.$$

В результате, в силу условия теоремы при $\lambda = i\zeta$ оператор $E + P_1(\lambda)P_0^{-1}(\lambda)$ обратим и из (3) получаем, что на мнимой оси существует резольвента $P^{-1}(\lambda)$:

$$P^{-1}(\lambda) = P_0^{-1}(\lambda)\left(E + P_1(\lambda)P_0^{-1}(\lambda)\right)^{-1}.$$

Теперь докажем неравенство (2). В силу того, что

$$\sum_{j=0}^{3} \left\| \lambda^{4-j} A^j P^{-1}(\lambda) \right\| = \sum_{j=0}^{3} \left\| \lambda^{4-j} A^j P_0^{-1}(\lambda)\left(E + P_1(\lambda)P_0^{-1}(\lambda)\right)^{-1} \right\| \le$$

$$\le \sum_{j=0}^{3} \left\| \lambda^{4-j} A^j P_0^{-1}(\lambda) \right\| \left\| \left(E + P_1(\lambda)P_0^{-1}(\lambda)\right)^{-1} \right\|$$

и так как

$$\left\| \lambda^{4-s} A^s P_0^{-1}(\lambda) \right\| \le \frac{1}{16} s^{\frac{s}{2}} (4-s)^{\frac{4-s}{2}} = a_{4-s}, \; s = 1, 2, 3,$$

то нам необходимо оценить норму $\left\| \lambda^4 P_0^{-1}(\lambda) \right\|$. Ясно, что при $\lambda = i\zeta$

$$\left\| \lambda^4 P_0^{-1}(\lambda) \right\| = \sup_{\mu \in \sigma(A)} \left| \frac{(i\zeta)^4}{(i\zeta - \mu)\,(i\zeta + \mu)^3} \right| = \sup_{\mu \in \sigma(A)} \frac{\zeta^4}{\left(\zeta^2 + \mu^2\right)^2} \le 1.$$

Таким образом, при $\lambda = i\zeta$, $\zeta \in R$, имеем:

$$\sum_{j=0}^{3} \left\| \lambda^{4-j} A^j P^{-1}(\lambda) \right\| \le (1 + a_3 + a_2 + a_1) \cdot \frac{1}{1-\alpha} = const.$$

Теорема доказана.

Замечание 1. Из доказательства теоремы 1 видно, что при $\lambda = i\zeta$, $\zeta \in R$, имеем оценку

$$\left\| A^q P^{-1}(\lambda) \right\| \le const |\lambda|^{q-4}, \quad 0 < q < 4, \; \lambda \ne 0. \tag{4}$$

Теперь перейдем к оценке резольвенты пучка (1) на некоторых секторах.

Теорема 2. *Пусть выполняется условие теоремы 1. Тогда при достаточно малом* $\varphi > 0$ *на секторах*

$$\Gamma_{\frac{\pi}{2} \pm \varphi} = \left\{ \lambda : \lambda = r e^{i\left(\frac{\pi}{2} \pm \varphi\right)}, \; r > 0 \right\},$$

$$\Gamma_{-\frac{\pi}{2} \pm \varphi} = \left\{ \lambda : \lambda = r e^{-i\left(\frac{\pi}{2} \pm \varphi\right)}, \; r > 0 \right\}$$

операторный пучок $P(\lambda)$ *обратим и справедлива оценка (2).*

Доказательство. Пусть $\lambda \in \Gamma_{\frac{\pi}{2}+\varphi}$. Тогда при $\lambda = \zeta e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)}$, $0 < \beta \le \varphi$, получаем, что

$$P(\lambda) = P\left(i\zeta e^{i\beta}\right) = P(i\zeta) + (i\zeta)^4\left(e^{4i\beta}-1\right)E + 2(i\zeta)^3\left(e^{3i\beta}-1\right)A - \\ - 2i\zeta\left(e^{i\beta}-1\right)A^3 + (i\zeta)^3\left(e^{3i\beta}-1\right)A_1 - \zeta^2\left(e^{2i\beta}-1\right)A_2 + i\zeta\left(e^{i\beta}-1\right)A_3. \quad (5)$$

По теореме 1 при условии, что $\alpha < 1$ операторный пучок (1) обратим на мнимой оси и имеет место оценка (2). Тогда (5) представимо в виде

$$P(\lambda) = P\left(i\zeta e^{i\beta}\right) = (E + M(\beta;\zeta))P(i\zeta),$$

где

$$M(\beta;\zeta) = \left(e^{4i\beta}-1\right)(i\zeta)^4 P^{-1}(i\zeta) + 2(i\zeta)^3\left(e^{3i\beta}-1\right)AP^{-1}(i\zeta) - \\ - 2i\zeta\left(e^{i\beta}-1\right)A^3P^{-1}(i\zeta) + (i\zeta)^3\left(e^{3i\beta}-1\right)A_1P^{-1}(i\zeta) - \\ - \zeta^2\left(e^{2i\beta}-1\right)A_2P^{-1}(i\zeta) + i\zeta\left(e^{i\beta}-1\right)A_3P^{-1}(i\zeta).$$

Ясно, что

$$\|M(\beta;\zeta)\| \le \left|e^{4i\beta}-1\right|\left\|(i\zeta)^4 P^{-1}(i\zeta)\right\| + 2\left|e^{3i\beta}-1\right|\left\|(i\zeta)^3 AP^{-1}(i\zeta)\right\| + \\ + 2\left|e^{i\beta}-1\right|\left\|i\zeta A^3P^{-1}(i\zeta)\right\| + \left|e^{3i\beta}-1\right|\left\|A_1A^{-1}\right\|\left\|(i\zeta)^3 AP^{-1}(i\zeta)\right\| + \\ + \left|e^{2i\beta}-1\right|\left\|A_2A^{-2}\right\|\left\|(i\zeta)^2 A^2P^{-1}(i\zeta)\right\| + \left|e^{i\beta}-1\right|\left\|A_3A^{-3}\right\|\left\|i\zeta A^3P^{-1}(i\zeta)\right\|.$$

Поскольку $0 < \beta \le \varphi$ и если принять во внимание теорему 1, то имеем:

$$\left\|\zeta^4 P^{-1}(i\zeta)\right\| \le \frac{1}{1-\alpha},$$

$$\left\|(i\zeta)^{4-j}A^jP^{-1}(i\zeta)\right\| \le \frac{1}{1-\alpha}a_{4-j}, \quad j = 1,2,3,$$

$$\left|e^{ik\beta}-1\right| \le 2\sin\frac{k\varphi}{2}, \quad k = 1,2,3,4.$$

Тогда, в силу вышеполученных, при достаточно малом φ и при $\zeta \in R$ получаем, что

$$\|M(\beta;\zeta)\| \le const \max_{k=1,4}\left|e^{ik\beta}-1\right| \le const \max_{k=1,4}\left(2\sin\frac{k\varphi}{2}\right) \le \alpha_1 < 1,$$

и потому $E + M(\beta;\zeta)$ обратим при малом φ $(0 < \beta \le \varphi)$ и $\zeta \in R$. Поэтому имеем, что

$$P^{-1}(\lambda) = P^{-1}(i\zeta)(E + M(\beta;\zeta))^{-1}$$

и

$$\sum_{j=0}^{3}\left\|\lambda^{4-j}A^jP^{-1}(\lambda)\right\| = \sum_{j=0}^{3}\left\|\left(i\zeta e^{i\beta}\right)^{4-j}A^jP^{-1}(i\zeta)(E + M(\beta;\zeta))^{-1}\right\| \le \\ \le \sum_{j=0}^{3}\left\|(i\zeta)^{4-j}A^jP^{-1}(i\zeta)\right\|\left\|(E + M(\beta;\zeta))^{-1}\right\| \le (1 + a_3 + a_2 + a_1)\cdot\frac{1}{1-\alpha_1} = const.$$

Аналогично доказываются остальные случаи. Теорема доказана.

Замечание 2. Следует отметить, что и на секторах $\Gamma_{\frac{\pi}{2}\pm\varphi}$ и $\Gamma_{-\frac{\pi}{2}\pm\varphi}$ имеет место оценка (4).

Через $\sigma_{\infty}(H)$ обозначим пространство вполне непрерывных операторов, действующих в H. Кроме приведенных в начале статьи условий на операторные коэффициенты пучка (1), предположим, что $A^{-1} \in \sigma_{\infty}(H)$. Тогда покажем, что операторный пучок (1) имеет дискретный спектр с единственной предельной точкой в бесконечности. Действительно, в силу того, что

$$P(\lambda) = \lambda^4 E + 2\lambda^3 A - 2\lambda A^3 - A^4 + \sum_{s=1}^{3} \lambda^{4-s} A_s =$$

$$= \left(\lambda^4 A^{-4} + 2\lambda^3 A^{-3} - 2\lambda A^{-1} - E + \sum_{s=1}^{3} \lambda^{4-s} A_s A^{-s} A^{-4+s} \right) A^4 = K(\lambda) A^4,$$

где

$$K(\lambda) = \lambda^4 A^{-4} + 2\lambda^3 A^{-3} - 2\lambda A^{-1} - E + \sum_{s=1}^{3} \lambda^{4-s} A_s A^{-s} A^{-4+s},$$

то $(K(\lambda) + E) \in \sigma_{\infty}(H)$ при любом $\lambda \in C$ (C- комплексная плоскость) и $K(0) = -E$. Поэтому по лемме Келдыша [1] $K(\lambda)$ имеет дискретный спектр с единственной предельной точкой в бесконечности. А из представления $P(\lambda) = K(\lambda) A^4$ следует, что этим свойством обладает и операторный пучок (1).

Отметим, что основной отличительной чертой настоящей статьи от соответствующих исследований работ [1]-[4] является то, что главная часть операторного пучка (1) имеет более сложную характеристику.

Полученные результаты позволяют перейти к дальнейшему изучению спектральных задач, например, вопросов полноты системы собственных и присоединенных векторов, либо их определенной части, полиномиального операторного пучка (1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Келдыш М.В. О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных линейных операторов // Успехи матем. наук. 1971. Т.26. №4 (160), с. 15-41.
2. Гасымов М.Г. О кратной полноте части собственных и присоединенных векторов полиномиальных операторных пучков // Известия АН Арм.ССР. Серия математика. 1971. Т.6. №2-3, с. 131-147.
3. Мирзоев С.С. Вопросы теории разрешимости краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве и спектральные задачи, связанные с ними. Дисс. … д.ф.-м.н. Баку: БГУ, 1994, 229 с.
4. Гумбаталиев Р.З. О разрешимости краевых задач для одного класса операторно-дифференциальных уравнений четвертого порядка. Дисс. … к.ф.-м.н. Баку: БГУ, 2000, 125 с.

MÜRƏKKƏB XARAKTERİSTİKALI DÖRDTƏRTİBLİ POLİNOMİAL OPERATOR DƏSTƏNİN REZOLVENTASININ QİYMƏTLƏNDİRİLMƏSİ HAQQINDA

A.R.ƏLİYEV, A.Ə.QASIMOV

XÜLASƏ

İşdə bir sinif dördtərtibli polinomial operator dəstələrin rezolventasının qiymətləndirilmələri alınmışdır, bunlar isə gələcəkdə imkan verir ki, yeni spektral məsələlər öyrənilsin. Qeyd edək ki, tədqiq olunan dəstələrin baş hissəsi mürəkkəb xarakteristikaya malikdir.

ON THE ESTIMATION OF THE RESOLVENT OF A POLYNOMIAL OPERATOR PENCIL OF FOURTH ORDER WITH COMPLICATED CHARACTERISTICS

A.R.ALIYEV, A.A.GASIMOV

SUMMARY

In the article we obtain the estimations of the resolvents of the same class of polynomial operator pencils of fourth-order which in future allow to study new spectral problems. It’s of interest to note that the main part of the investigated pencils possesses complicated characteristics.